

МИНОБРНАУКИ РОССИИ



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«**Российский государственный гуманитарный университет**»  
(ФГБОУ ВО «РГГУ»)

ОТДЕЛЕНИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ГУМАНИТАРНОЙ СФЕРЕ

Кафедра математики, логики и интеллектуальных систем в гуманитарной сфере

## **ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА**

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

45.03.04 Интеллектуальные системы в гуманитарной сфере

Разработка и программирование интеллектуальных систем

Уровень высшего образования: бакалавриат

Форма обучения очная

РПД адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями  
здоровья и инвалидов

Москва 2023

Дискретная математика  
Рабочая программа дисциплины  
Составитель:  
Кандидат физико-математических наук, доцент  
Е. А. Ефимова

.....

УТВЕРЖДЕНО  
Протокол заседания кафедры МЛиИС  
№   2   от   16.03.2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |    |
|--|----|
| 1. <b>Error! Bookmark not defined.</b>   |    |
| 1.1. <b>Error! Bookmark not defined.</b>   |    |
| 1.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций | 4  |
| 1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы  | 6  |
| 2. <b>Error! Bookmark not defined.</b>   |    |
| 3. <b>Error! Bookmark not defined.</b>   |    |
| 4. <b>Error! Bookmark not defined.</b>   |    |
| 5. <b>Error! Bookmark not defined.</b>   |    |
| 5.1 <b>Error! Bookmark not defined.</b>  |    |
| 5.2 <b>Error! Bookmark not defined.</b>  |    |
| 5.3 <b>Error! Bookmark not defined.</b>  |    |
| 6. <b>Error! Bookmark not defined.</b>   |    |
| 6.1 <b>Error! Bookmark not defined.</b>  |    |
| 6.2 <b>Error! Bookmark not defined.</b>  |    |
| 7. <b>Error! Bookmark not defined.</b>   |    |
| 8. <b>Error! Bookmark not defined.</b>   |    |
| 9. <b>Error! Bookmark not defined.</b>   |    |
| 9.1 <b>Error! Bookmark not defined.</b>  |    |
| 9.2 <b>Error! Bookmark not defined.</b>  | 20 |
| Приложение 1. Аннотация дисциплины   | 21 |

## 1. Пояснительная записка

### 1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель дисциплины: подготовка специалиста, знающего основные понятия теории графов, владеющего основными методами анализа графов, а также основными методами и алгоритмами решения задач на графах.

Задачи дисциплины:

- знакомство с основными понятиями теории графов, необходимых специалисту в области программирования и разработки информационных и интеллектуальных систем;
- изучение связности и достижимости в ориентированных и неориентированных графах;
- изучение методов исследования свойств графов;
- знакомство с матричным анализом графов;
- изучение пространства циклов и пространства разрезов графа;
- изучение алгоритмов решения задач оптимизации на графах, необходимых специалисту в области программирования и разработки информационных и интеллектуальных систем.

### 1.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

| Компетенция<br>(код и наименование)  | Индикаторы компетенций<br>(код и наименование)  | Результаты обучения   |
|--|---|---|
| ОПК-1. Способен использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа, логики и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в информатике, лингвистике и гуманитарных науках | ОПК-1.1. Способен использовать основы математического анализа, логики и математического моделирования.  | Знать: основные понятия теории графов; понятия связности в неориентированных графах и виды связности в ориентированных графах; понятия эйлера и гамильтонова графа; свойства ациклических графов, деревьев, планарных графов и двудольных графов, знаковых графов; понятие раскраски графа и хроматического числа графа<br>Уметь: строить матрицу смежности и матрицу инцидентности графа; находить компоненты связности неориентированного графа; строить граф конденсации для |
|  | ОПК -1.2. Способен использовать математические методы для построения моделей в информатике, лингвистике и некоторых гуманитарных дисциплинах. |   |

|   |   |  |
|---|---|--|
|   | <p>ОПК- 1.3. Владеет методами теоретического и экспериментального исследования в информатике</p>                      | <p>ориентированного графа; выполнять топологическую сортировку вершин ациклического графа; находить центры деревьев; строить матрицу Кирхгофа и определять количество остовных деревьев по матрице Кирхгофа; определять, является ли граф двудольным; применять теорему Харари для определения сбалансированности графа; находить раскраски графа с помощью приближенным методов<br/> Владеть: алгоритмом поиска эйлерова цикла; алгоритмами поиска остовных деревьев графа; методами поиска всех минимальных внешне устойчивых множеств; поиска всех минимальных вершинных покрытий и максимальных независимых множеств; методами поиска всех оптимальных раскрасок графа</p> |
| <p>ОПК-2 Способен получать знания в области современных проблем науки, техники и технологии информатики, гуманитарных, лингвистических, и социальных наук</p> | <p>ОПК 2.1. Знает методы доступа к информационным ресурсам.</p>   | <p>Знать: матричные методы анализа графов; понятия пространства циклов и пространства разрезов графа; формулировки и методы решения задач оптимизации на графах<br/> Уметь: находить матрицу достижимости методом возведения в степень; находить матрицу достижимости с помощью алгоритма Уоршола; находить матрицу количества путей между вершинами; находить цикломатическое число графа и ранг графа; строить базис пространства</p>  |
|   | <p>ОПК 2.2. Пользуется современными справочными и библиотечными системами и системами дистанционного образования.</p> |  |

|  |  |  |
|--|--|--|
|  | ОПК 2.3. Имеет практический опыт работы с поисковыми машинами, справочными и библиотечными системами и системами дистанционного образования. | циклов и базис пространства разрезов графа<br>Владеть: алгоритмами поиска минимального остова графа; алгоритмами поиска кратчайших путей между вершинами графа; методом решения задачи об оптимальном планировании работ; методом поиска максимального потока в сети; методами поиска максимального паросочетания в двудольном графе |
|--|--|--|

### 1.3. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы

Дисциплина «Дискретная математика» относится к обязательной части, формируемой участниками образовательных отношений базовой части блока дисциплин учебного плана. Для освоения дисциплины необходимы знания, умения и владения, сформированные в ходе изучения следующих дисциплин и прохождения практик:

- знание основных понятий математической логики и алгебры;
- умение использовать методы математической логики;
- владение основными методами линейной алгебры.

В результате освоения дисциплины формируются знания, умения и владения, необходимые для изучения следующих дисциплин и прохождения практик: логическое программирование, интеллектуальные системы, базы данных, интеллектуальный анализ данных и машинное обучение, введение в робототехнику.

## 2. Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 академических часа.

### Структура дисциплины для очной формы обучения

Объем дисциплины в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

| Семестр | Тип учебных занятий | Количество часов |
|---------|---------------------|------------------|
| 3       | Лекции              | 24               |
| 3       | Семинары            | 32               |
| Всего:  |                     | 56               |

Объем дисциплины в форме самостоятельной работы обучающихся составляет 88 академических часов.

## 3. Содержание дисциплины

| № п/п | Наименование раздела дисциплины            | Содержание  |
|-------|--|---|
| 1     | Основные понятия теории графов             | Понятие ориентированного и неориентированного графов. Частичные графы, подграфы и полные графы. Изоморфизм графов. Степени вершин. Матрица смежности и матрица инцидентности графа. Теоретико-множественные операции над графами.   |
| 2     | Достижимость в графах                      | Связность и достижимость в неориентированных графах. Виды связности в ориентированном графе. Компоненты связности неориентированного графа и компоненты сильной связности ориентированного графа. Эйлеров цикл и гамильтонов цикл. Ациклические ориентированные графы и топологическая сортировка. Матрица количества путей графа. Матрица достижимости графа. Алгоритм Уоршола вычисления матрицы достижимости графа.  |
| 3     | Остовы графа. Основные свойства графов     | Деревья, свойства деревьев. Кодирование и декодирование деревьев по методу Прюфера. Количество помеченных деревьев с $n$ вершинами. Остов графа и его хорды. Алгоритмы поиска остовных деревьев методами в глубину и в ширину. Матрица Кирхгофа и количество остовных деревьев связного графа. Векторное пространство частичных графов. Пространство циклов графа. Цикломатическое число графа и его ранг. Евклидово пространство частичных графов. Пространство разрезов графа. Методы поиска базиса пространства циклов и базиса пространства разрезов графа. Двудольные графы. Критерий двудольности графа. Знаковые графы, теорема Харари. Планарные графы, теорема Эйлера. |
| 4     | Задачи оптимизации на графах. Устойчивость | Нагруженные (взвешенные) графы. Алгоритмы Крускала и Прима поиска минимальных остовов графа. Алгоритм Дейкстры построения дерева кратчайших путей. Алгоритм Флойда-Уоршола поиска кратчайших путей между всеми парами вершин графа. Постановка и методы решения задачи о планировании работ. Метод Форда-Фалкерсона решения задачи о максимальном потоке в сети. Задача о максимальном паросочетании в двудольном графе и методы ее решения. Раскраска графа. Хроматическое число графа. Внешняя и внутренняя устойчивость  |

#### 4. Образовательные технологии

| № п/п | Наименование раздела           | Виды учебных занятий     | Образовательные технологии |
|-------|--------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 1     | 2                              | 3                        | 4                          |
| 1     | Основные понятия теории графов | Лекции 1-3.<br>Семинар 1 | Проблемная лекция.         |

|   |  |             |  |
|---|--|-------------|--|
|   |  | Семинар 2   | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
|   |  | Семинар 3   | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
|   |  | Семинар 4   | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
|   |  |             | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
| 2 | Достижимость в графах                  | Лекция 5-7  | Проблемная лекция.   |
|   |  | Семинар 5   | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
|   |  | Семинар 6   | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
|   |  | Семинар 7   | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
|   |  | Семинар 8   | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
| 3 | Остовы графа. Основные свойства графов | Лекция 8-10 | Проблемная лекция.   |
|   |  | Семинар 9   | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
|   |  | Семинар 10  | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
|   |  | Семинар 11  | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
|   |  | Семинар 12  | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |



|   |   |              |  |
|---|---|--------------|--|
| 4 | Задачи оптимизации на графах.<br>Устойчивость | Лекция 10-12 | Проблемная лекция.   |
|   |   | Семинар 13   | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
|   |   | Семинар 14   | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
|   |   | Семинар 15   | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |
|   |   | Семинар 16   | Обсуждение теоретического материала. Практикум по решению задач. |

В период временного приостановления посещения обучающимися помещений и территории РГГУ для организации учебного процесса с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий могут быть использованы следующие образовательные технологии:

- видео-лекции;
- онлайн-лекции в режиме реального времени;
- электронные учебники, учебные пособия, научные издания в электронном виде и доступ к иным электронным образовательным ресурсам;
- системы для электронного тестирования;
- консультации с использованием телекоммуникационных средств.

## 5. Оценка планируемых результатов обучения

### 5.1. Система оценивания

| <i>Форма контроля</i>            | <i>Макс. количество баллов</i> |              |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------|
|                                  | <i>За одну работу</i>          | <i>Всего</i> |
| Текущий контроль:                |                                |              |
| • Домашнее задание               | 3 балла                        | 30 баллов    |
| • Контрольная работа             | 30 баллов                      | 30 баллов    |
| Промежуточная аттестация (зачет) |                                | 40 баллов    |
| Итого за семестр (дисциплину)    |                                | 100 баллов   |

Полученный совокупный результат конвертируется в традиционную шкалу оценок и в шкалу оценок Европейской системы переноса и накопления кредитов (European Credit Transfer System; далее – ECTS) в соответствии с таблицей:

|                    |                    |            |
|--------------------|--------------------|------------|
| 100-балльная шкала | Традиционная шкала | Шкала ECTS |
|--------------------|--------------------|------------|

|          |                     |            |    |
|----------|---------------------|------------|----|
| 95 – 100 | отлично             | зачтено    | A  |
| 83 – 94  |                     |            | B  |
| 68 – 82  | хорошо              |            | C  |
| 56 – 67  |                     |            | D  |
| 50 – 55  |                     |            | E  |
| 20 – 49  | неудовлетворительно | не зачтено | FX |
| 0 – 19   |                     |            | F  |

## 5.2. Критерии выставления оценки по дисциплине

| Баллы/<br>Шкала<br>ECTS | Оценка по<br>дисциплине            | Критерии оценки результатов обучения по дисциплине  |
|-------------------------|------------------------------------|---|
| 100-83/<br>A,B          | отлично/<br>зачтено                | <p>Выставляется обучающемуся, если он глубоко и прочно усвоил теоретический и практический материал, может продемонстрировать это на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся исчерпывающе и логически стройно излагает учебный материал, умеет увязывать теорию с практикой, справляется с решением задач профессиональной направленности высокого уровня сложности, правильно обосновывает принятые решения.</p> <p>Свободно ориентируется в учебной и профессиональной литературе.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «высокий».</p>                                   |
| 82-68/<br>C             | хорошо/<br>зачтено                 | <p>Выставляется обучающемуся, если он знает теоретический и практический материал, грамотно и по существу излагает его на занятиях и в ходе промежуточной аттестации, не допуская существенных неточностей.</p> <p>Обучающийся правильно применяет теоретические положения при решении практических задач профессиональной направленности разного уровня сложности, владеет необходимыми для этого навыками и приёмами.</p> <p>Достаточно хорошо ориентируется в учебной и профессиональной литературе.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «хороший».</p>                                       |
| 67-50/<br>D,E           | удовлетворительно/<br>зачтено      | <p>Выставляется обучающемуся, если он знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает отдельные ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся испытывает определённые затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, владеет необходимыми для этого базовыми навыками и приёмами.</p> <p>Демонстрирует достаточный уровень знания учебной литературы по дисциплине.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «достаточный».</p> |
| 49-0/<br>F,FX           | неудовлетворительно/<br>не зачтено | <p>Выставляется обучающемуся, если он не знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает грубые ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся испытывает серьёзные затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач</p>  |

| Баллы/<br>Шкала<br>ECTS | Оценка по<br>дисциплине | Критерии оценки результатов обучения по дисциплине  |
|-------------------------|-------------------------|---|
|                         |                         | <p>профессиональной направленности стандартного уровня сложности, не владеет необходимыми для этого навыками и приёмами.</p> <p>Демонстрирует фрагментарные знания учебной литературы по дисциплине.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляются обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции на уровне «достаточный», закреплённые за дисциплиной, не сформированы.</p> |

### 5.3. Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

#### Примеры домашних заданий

##### Пример 1

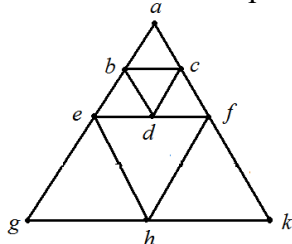
1. Найти эйлеров цикл в графе  $\langle \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{f, h\}, \{g, h\}\} \rangle$ .
2. Найти граф конденсации для орграфа  $\langle \{a, b, c, d, e\}, \{(a, b), (a, e), (b, c), (c, d), (c, e), (d, a)\} \rangle$ .
3. Найти топологическую сортировку орграфа  $\langle \{a, b, c, d, e, f\}, \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (e, d), (f, b), (f, e)\} \rangle$ .
4. Найти матрицу количества путей длины 3 для графа  $\langle \{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\} \rangle$ .
5. Найти с помощью алгоритма Уоршолла матрицу достижимости графа из задания 4.

##### Пример 2

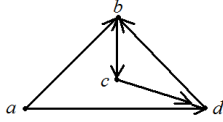
1. Построить дерево по коду Прюфера [2, 1, 7, 1, 3].
2. Найти количество остовных деревьев с помощью матрицы Кирхгофа для графа  $\langle \{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\} \rangle$ .
3. Определить, сбалансирован ли граф с вершинами  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ , содержащий положительные ребра  $\{a, h\}, \{c, i\}, \{d, e\}, \{f, i\}, \{h, i\}$  и отрицательные ребра  $\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, i\}, \{c, d\}, \{d, i\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{g, i\}$ .
4. С помощью алгоритма Крускала найти минимальное остовное дерево для графа, содержащего ребра  $(a, b, 4), (a, e, 1), (b, c, 2), (b, e, 2), (c, e, 3), (d, e, 5), (f, e, 1)$ .
5. Найти кратчайшие пути от вершины  $a$  до остальных вершин графа из задания 4 с помощью алгоритма Дейкстры.

##### Пример контрольной работы 1

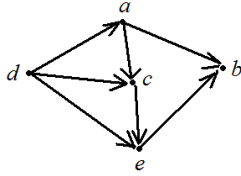
1. Найти эйлеров цикл графа:



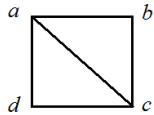
2. Найти граф конденсации орграфа:



3. Найти топологическую сортировку орграфа:



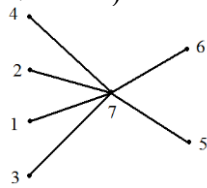
4. Найти матрицу количества путей длины 3 для графа:



5. Найти с помощью алгоритма Уоршолла матрицу достижимости графа из задания 4.

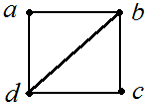
### Пример контрольной работы 2

1. а) Найти код Прюфера для дерева:

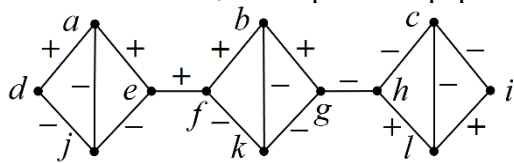


б) Построить дерево по коду Прюфера [1,1,2,8,3,3].

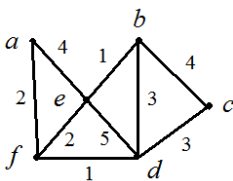
2. Найти с помощью матрицы Кирхгофа количество остовных деревьев в графе:



3. С помощью теоремы Харари определить, сбалансирован ли граф



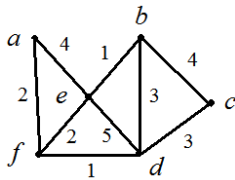
4. С помощью алгоритма Крускала найти минимальное остовное дерево для графа:



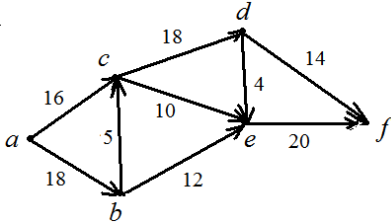
5. Найти минимальное остовное дерево для графа из задания 4 с помощью матричного алгоритма Прима.

### Пример итоговой работы

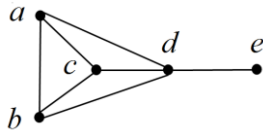
1. Найти кратчайшие пути от вершины a до остальных вершин графа с помощью алгоритма Дейкстры.



2. Найти то же с помощью матричного алгоритма Дейкстры.
3. Найти матрицу кратчайших расстояний и кратчайший путь из вершины  $a$  в вершину  $b$  с помощью алгоритма Флойда-Уоршола для графа из задания 1.
4. Найти максимальный поток в сети:



5. Решить задачу о назначениях: Алевтин и Борис работают в комитетах 1, 2 и 3, Виктор работает в комитетах 1, 4, 5 и 6, Георгий работает в комитетах 3 и 7, Дмитрий работает в комитетах 3, 4 и 5, Емельян работает в комитете 7, Игнат работает в комитетах 2, 4 и 6. На предстоящем совещании каждый должен рассказать о работе одного из комитетов. Распределите комитеты так, чтобы было охвачено наибольшее их число.
6. Составить план проекта, состоящий из 5 или 6 работ. Построить для него сетевой график, определить резервы работ и критические работы. Найти оптимальное время выполнения проекта.
7. Найти все минимальные внешне устойчивые множества графа:



8. Найти все максимальные клики графа из задания 7.
9. Найти все минимальные вершинные покрытия и максимальные независимые множества графа из задания 7.

### Вопросы для самоконтроля

1. Основные определения теории графов. Неориентированный граф. Простой граф, мультиграф, псевдограф. Частичные графы и подграфы. Полные графы.
2. Ориентированный граф. Степень вершины. Теорема о сумме степеней вершин графа. Степени входа и степени выхода вершины орграфа. Источник и сток. Матрица смежности и матрица инцидентности (ор)графа.
3. Теоретико-множественные операции над графами: объединение, пересечение, разность графов, дополнение графа, декартово произведение графов. Изоморфизм графов.
4. Путь, цепь, простая цепь, цикл в графе. Связность и достижимость в графе. Компоненты связности. Точки сочленения. Теорема о точке сочленения. Центр, радиус, эксцентриситет и диаметр графа.
5. Эйлеровы циклы и эйлеровы графы. Теорема Эйлера. Гамильтоновы циклы. Достаточные условия существования гамильтонова цикла (без доказательства).
6. Путь, цепь, простая цепь, цикл в орграфе. Связность, сильная связность, слабая связность и односторонняя связность в орграфах. Отношение сильной связности как отношение эквивалентности. Граф конденсации. Ацикличность графа конденсации.

7. Ациклические орграфы. Существование источника и стока в ациклическом орграфе. Топологическая сортировка. Критерий существования топологической сортировки орграфа.
8. Теорема о матрице количества путей в графе и ее следствия. Матричный метод поиска путей в графе.
9. Теорема о свойствах степеней суммы матрицы смежности графа и единичной матрицы и ее следствия. Построение матрицы достижимости графа методом возведения в степень.
10. Алгоритм Уоршола построения матрицы достижимости графа и его обоснование.
11. Деревья. Теорема о свойствах деревьев. Остов графа. Существование остова. Хорды остова. Цикломатическое число графа. Критерий равенства цикломатического числа нулю или единице.
12. Количество деревьев на множестве  $n$  вершин. Теорема Кэли и кодирование и декодирование деревьев по методу Прюфера.
13. Центры деревьев. Матрица Кирхгофа и теорема о количестве остовных деревьев графа (без доказательства). Алгоритмы построения остовного дерева с помощью простых циклов, а также методами поиска в глубину и в ширину.
14. Векторное пространство частичных графов. Подпространство частичных графов с четными степенями вершин.
15. Теорема о базисе пространства циклов.
16. Евклидово пространство частичных графов. Разрезы графа. Ортогональность разрезов и циклов. Теорема о базисе пространства разрезов. Ранг графа.
17. Матричные методы поиска базиса пространства циклов и базиса пространства разрезов.
18. Двудольные графы. Критерий двудольности графа. Полные двудольные графы.
19. Знаковые графы. Сбалансированность. Теорема Харари.
20. Планарные графы. Плоские графы. Теорема о количестве граней плоского графа. Формула Эйлера.
21. Доказательство непланарности графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ . Гомеоморфные графы. Теорема Куратовского-Понтрягина (без доказательства).
22. Взвешенные (нагруженные) графы. Алгоритм Крускала построения минимального остовного дерева и его обоснование. Алгоритм Прима. Матричный алгоритм Прима.
23. Алгоритм Дейкстры поиска кратчайших путей и его обоснование.
24. Алгоритм Флойда-Уоршола и его обоснование.
25. Задача о планировании работ. Минимальное время выполнения проекта. Сетевой график. Резервы работ. Критические работы и критический путь.
26. Задача о максимальном потоке. Поток и его свойства. Сечения.
27. Увеличивающие цепи и алгоритм их поиска. Метод Форда-Фалкерсона поиска максимального потока и его обоснование.
28. Задача о максимальном паросочетании в двудольном графе и методы ее решения.
29. Внутренняя и внешняя устойчивость. Клика. Вершинное покрытие. Критерии независимости множества вершин. Число внутренней устойчивости, число вершинного покрытия и соотношение между ними. Методы поиска минимальных внешне устойчивых множеств, минимальных вершинных покрытий и максимальных клик.
30. Раскраска графа. Хроматическое число графа. Бихроматические графы. Оценки хроматических чисел графов. Теорема Брукса (вторая часть – без доказательства). Раскраска плоского графа. Поиск оптимальных раскрасок графа.

## **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### **6.1. Список источников и литературы**

#### *а) Основная литература*

1. Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика / Джеймс А. Андерсон; пер. с англ. – М., СПб.: «Диалектика», 2020. – 960 с.
2. Ефимова Е. А. Дискретная математика : учебное пособие : для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 45.03.04 - "Интеллектуальные системы в гуманитарной сфере" / Е. А. Ефимова ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджетное образоват. учреждение высш. образования "Рос. гос. гуманитарный ун-т", Отд-ние интеллектуал. систем в гуманитарной сфере, Каф. математики, логики и интеллектуал. систем в гуманитарной сфере. - Москва : РГГУ, 2021. - 174 с. - URL: <http://elib.lib.rsuh.ru/elib/000015370> - Режим доступа: свободный. - Текст: электронный. - ISBN 978-5-7281-2860-1.
3. Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера : учебное пособие / О. П. Кузнецов. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-0570-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/220>.
4. Куликов В.В. Дискретная математика: Учебное пособие. - М.: РИОР, 2007. - 174 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-369-00205-6 <http://znanium.com/bookread2.php?book=126799>
5. Харари Ф. Теория графов – М.: «ЛЕНАНД», 2018. – 298 с.

*б) Дополнительная литература*

1. Асанов М.О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: учеб. пособие / М.О. Асанов, В.А. Баранский, В.В. Расин. – М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 288 с.
2. Касьянов В. Н. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение / В.Н. Касьянов, В.А. Евстигнеев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
3. Кормен Т. Х. Алгоритмы: Построение и анализ / Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн; пер. с англ. – М., СПб.: «Диалектика», 2020. – 1323 с.
4. Редькин Н.П. Дискретная математика. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 264 с.: 60x90 1/16. (переплет) ISBN 978-5-9221-1093-8 <http://znanium.com/bookread2.php?book=208908>

## **6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

Национальная электронная библиотека (НЭБ) [www.rusneb.ru](http://www.rusneb.ru)  
 ELibrary.ru Научная электронная библиотека [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)  
 Электронная библиотека Grebennikon.ru [www.grebennikon.ru](http://www.grebennikon.ru)  
 Cambridge University Press  
 ProQuest Dissertation & Theses Global  
 SAGE Journals  
 Taylor and Francis  
 JSTOR  
<http://www.wolframalpha.com>

### **6.3. Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы**

Доступ к профессиональным базам данных: <https://liber.rsuh.ru/ru/bases>

Информационные справочные системы:

1. Консультант Плюс
2. Гарант

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Для обеспечения дисциплины используется материально-техническая база образовательного учреждения: учебные аудитории, оснащённые доской, а также компьютером и проектором для демонстрации учебных материалов.

Состав программного обеспечения:

1. Windows
2. Microsoft Office

### **8. Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов**

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- для слепых и слабовидящих: лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением; письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением или могут быть заменены устным ответом; обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс; для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств; письменные задания оформляются увеличенным шрифтом; экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.
- для глухих и слабослышащих: лекции оформляются в виде электронного документа, либо предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования; письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме; экзамен и зачёт проводятся в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.
- для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением; письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением; экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения предусматривается использование технических средств, необходимых в связи с индивидуальными особенностями обучающихся. Эти средства могут быть предоставлены университетом, или могут использоваться собственные технические средства.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием



дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

- для слепых и слабовидящих: в печатной форме увеличенным шрифтом, в форме электронного документа, в форме аудиофайла.
- для глухих и слабослышащих: в печатной форме, в форме электронного документа.
- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме, в форме электронного документа, в форме аудиофайла.

Учебные аудитории для всех видов контактной и самостоятельной работы, научная библиотека и иные помещения для обучения оснащены специальным оборудованием и учебными местами с техническими средствами обучения:

- для слепых и слабовидящих: устройством для сканирования и чтения с камерой SARA CE; дисплеем Брайля PAC Mate 20; принтером Брайля EmBraille ViewPlus;
- для глухих и слабослышащих: автоматизированным рабочим местом для людей с нарушением слуха и слабослышащих; акустический усилитель и колонки;
- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата: передвижными, регулируемые эргономическими партами СИ-1; компьютерной техникой со специальным программным обеспечением.

## **9. Методические материалы**

### **9.1. Планы семинарских занятий**

#### **Тема 1 (8 ч) Основные понятия теории графов**

Цель занятия: изучить основные понятия теории графов, научиться использовать матрицы смежности и инцидентности

Форма проведения – обсуждение, решение упражнений

Вопросы для обсуждения

1. Понятие ориентированного графа.
2. Понятие неориентированного графа.
3. Примеры частичных графов, подграфов и полных графов.
4. Матрица смежности.
5. Матрица инцидентности.
6. Степени вершин графа.

Контрольные вопросы

1. Построение матрицы смежности и матрицы инцидентности графа (упр. 1.3а–1.8а).
2. Примеры полных и полных двудольных графов (упр. 1.13).
3. Построение подграфов графа (упр. 1.16).
4. Объединение, пересечение, разность и произведение графов (упр. 1.19б–1.21б).
5. Построение изоморфизма графов (упр. 1.18).
6. Построение  $n$ -валентных графов (упр. 1.9).

Номера упражнений в разделе 9.1 даны по учебному пособию Ефимовой Е. А.

Список источников и литературы:

1. Ефимова Е. А. Дискретная математика. – Москва: РГГУ, 2021 (с. 7–25).
2. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера (с. 91-99).
3. Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика (с. 244-248, 250-255; с. 278-279; с. 556).

Материально-техническое обеспечение занятия: академическая аудитория с доской.

## **Тема 2 (8 ч) Достижимость в графах**

Цель занятий: научиться использовать алгоритм поиска эйлерова цикла, строить гамильтоновы циклы, граф конденсации, выполнять топологическую сортировку орграфа, изучить методы анализа графов с помощью матрицы смежности

Форма проведения – обсуждение, решение упражнений

Вопросы для обсуждения

1. Пути и циклы в неориентированных графах.
2. Виды связности в орграфе.
3. Отношение достижимости неориентированного графа.
4. Точка сочленения.
5. Расстояния в графах.
6. Ациклические орграфы.
7. Компоненты сильной связности орграфа.
8. Граф конденсации.
9. Матрица количества путей графа.
10. Матрица достижимости графа.

Контрольные вопросы

1. Вычислить эксцентриситеты вершин, радиус, диаметр и центр графа (упр. 2.5–2.6).
2. Найти эйлеров цикл или эйлеров путь в графе, если он существует (упр. 2.8).
3. Найти гамильтонов или гамильтонов путь в графе, если он существует (упр. 2.8).
4. Построить граф конденсации орграфа (упр. 3.2).
5. Найти топологическую сортировку орграфа (упр. 3.3).
6. Построить матрицу количества путей графа (упр. 3.4(1)).
7. Построить матрицу достижимости графа методом возведения в степень (упр. 3.4(2)).
8. Применить алгоритм Уоршола для вычисления матрицы достижимости графа (упр. 3.5).

Список источников и литературы:

1. Ефимова Е. А. Дискретная математика. – Москва: РГГУ, 2021 (с. 26–29, 31–41, 42–47, 51–60).
2. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера (с. 99-103, 107-109; 103-106, 109-114).
3. Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика (с. 248-250; 255-256; 270-273; 280-285; 600-602).

Материально-техническое обеспечение занятия: академическая аудитория с доской.

## **Тема 3 (8 ч) Остовы графа. Основные свойства графов**

Цель занятий: научиться использовать алгоритмы построения остовных деревьев связного графа; научиться кодировать деревья по методу Прюфера, а также восстанавливать дерево по его коду; научиться находить базис пространства циклов графа и базис пространства

разрезов; изучить основные свойства графов, научиться определять, является ли знаковый граф сбалансированным

Форма проведения – обсуждение, решение упражнений

Вопросы для обсуждения

1. Понятие дерева.
2. Кодирование и декодирование деревьев по методу Прюфера.
3. Количество помеченных деревьев с  $n$  вершинами.
4. Понятие остова графа.
5. Хорды остова.
6. Алгоритмы поиска остовных деревьев методами поиска циклов, в глубину и в ширину.
7. Центр дерева.
8. Проверка, является ли граф двудольным.
9. Проверка, является ли граф планарным.
10. Сбалансированные графы.
11. «Жадный» алгоритм раскраски графа.

Контрольные вопросы

1. Построить остов графа методом выделения простых циклов (упр. 4.4a,d).
2. Построить остов графа методом поиска в ширину (упр. 4.4b).
3. Построить остов графа методом поиска в глубину (упр. 4.4c).
4. Найти центр дерева (упр. 4.1).
5. Построить код Прюфера по дереву (упр. 4.6).
6. Восстановить дерево по коду Прюфера (упр. 4.7).
7. Определить листья дерева по коду Прюфера.
8. Найти все помеченные деревья с 4 вершинами с помощью кода Прюфера.
9. Построить матрицу Кирхгофа графа (упр. 4.9).
10. Найти количество остовных деревьев связного графа с помощью матрицы Кирхгофа (упр. 4.8).
11. Определить, является ли граф двудольным (упр. 6.2).
12. Проверить, является ли знаковый граф сбалансированным с помощью теоремы Харари (упр. 6.3).
13. Определить, является ли граф планарным (упр. 6.7–6.8).
14. Построить функцию Гранди графа (упр. 6.10).

Список источников и литературы:

1. Ефимова Е. А. Дискретная математика. – Москва: РГГУ, 2021 (с. 61–81, 100–116).
2. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера (с. 114-118, 120-132).
3. Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика (с. 259-264; 624-626; 658-665; 669-675; 676-677).
4. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы (с. 79-83).

Материально-техническое обеспечение занятия: академическая аудитория с доской.

#### **Тема 4 (8 ч) Задачи оптимизации на графах. Устойчивость**

Цель занятий: изучить методы решения задач оптимизации на графах; находить максимальные независимые множества, максимальные клики, минимальные вершинные покрытия и минимальные внешне устойчивые множества вершин графа

Форма проведения – обсуждение, решение упражнений

#### Вопросы для обсуждения

1. Нагруженные графы.
2. Алгоритмы Крускала и Прима поиска минимальных остовов графа.
3. Алгоритм Дейкстры построения дерева кратчайших путей.
4. Алгоритм Флойда-Уоршола поиска кратчайших путей между всеми парами вершин графа.
5. Постановка и методы решения задачи о планировании работ.
6. Метод Форда-Фалкерсона решения задачи о максимальном потоке в сети.
7. Задача о максимальном паросочетании в двудольном графе и методы ее решения.
8. Максимальные независимые множества вершин графа.
9. Минимальные вершинные покрытия.
10. Максимальные клики.
11. Минимальные внешне устойчивые множества вершин графа.

#### Контрольные вопросы

1. Найти минимальный остов графа четырьмя способами (упр. 7.1).
2. Построить дерево кратчайших путей из заданной вершины (упр. 7.2).
3. Применить алгоритм Флойда-Уоршола поиска кратчайших путей между всеми парами вершин графа (упр. 7.3).
4. Составить и решить задачу о планировании работ (упр. 8.7–8.8).
5. Найти максимальный поток в сети (упр. 8.1–8.2).
6. Найти максимальное паросочетание в двудольном графе (упр. 8.3).
7. Решить задачу о назначениях (упр. 8.4–8.6).
8. Алгоритмы поиска максимальных независимых множеств графа, минимальных вершинных покрытий, максимальных клик и минимальных внешне устойчивых множеств (упр. 9.1 (1-4)).

#### Список источников и литературы:

1. Ефимова Е. А. Дискретная математика. – Москва: РГГУ, 2021 (с. 117–166, 169–170).
2. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженера (с. 125-126, 128-132; 126-128, 132-134; 134-137; 137-138; 138-142; 142-146; 146-150).
3. Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика (с. 250-251, 580- 582; 586-589; 682-689; 611-621; 691-705, 707-710).

Материально-техническое обеспечение занятия: академическая аудитория с доской.

#### **9.2. Методические рекомендации по подготовке письменных работ**

При подготовке к письменной контрольной работе и к итоговой работе необходимо:

- 1) изучить теоретический материал, который обсуждался на занятиях;
- 2) выполнить домашние задания по пройденным темам.

## АННОТАЦИЯ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина реализуется кафедрой математики, логики и интеллектуальных систем в гуманитарной сфере в третьем и четвертом семестрах.

Цель дисциплины: подготовка специалиста, знающего основные понятия теории графов, владеющего основными методами анализа графов, а также основными методами и алгоритмами решения задач на графах.

Задачи дисциплины: знакомство с основными понятиями теории графов, необходимых специалисту в области программирования и разработки информационных и интеллектуальных систем; изучение связности и достижимости в ориентированных и неориентированных графах; изучение методов исследования свойств графов; знакомство с матричным анализом графов; изучение пространства циклов и пространства разрезов графа; изучение алгоритмов решения задач оптимизации на графах, необходимых специалисту в области программирования и разработки информационных и интеллектуальных систем.

Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций:

- ОПК-1. Способен использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа, логики и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в информатике, лингвистике и гуманитарных науках;
- ОПК-2 – Способен получать знания в области современных проблем науки, техники и технологии информатики, гуманитарных, лингвистических, и социальных наук.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

- основные понятия теории графов;
- понятия связности в неориентированных графах и виды связности в ориентированных графах;
- понятия эйлера и гамильтонова графа;
- свойства ациклических графов, деревьев, планарных графов и двудольных графов;
- понятие раскраски графа и хроматического числа графа;
- матричные методы анализа графов;
- понятия пространства циклов и пространства разрезов графа;
- формулировки и методы решения задач оптимизации на графах.

Уметь:

- находить компоненты связности неориентированного графа;
- строить граф конденсации для ориентированного графа;
- выполнять топологическую сортировку вершин ациклического графа;
- находить матрицу количества путей между вершинами;
- находить матрицу достижимости с помощью алгоритма Уоршола;
- находить остовы графа;
- находить цикломатическое число графа и ранг графа;
- строить базис пространства циклов и базис пространства разрезов графа.

Владеть:

- алгоритмом нахождения эйлера цикла графа;
- алгоритмами поиска минимального остова графа;
- алгоритмами поиска кратчайших путей между вершинами графа;
- методом решения задачи об оптимальном планировании работ;

- алгоритмом поиска максимального потока в сети;
- методами поиска максимального паросочетания в двудольном графе.
- алгоритмом поиска всех минимальных внешне устойчивых множеств;
- алгоритмом поиска всех минимальных вершинных покрытий и максимальных независимых множеств;
- алгоритмом поиска всех оптимальных раскрасок графа.

По дисциплине предусмотрена промежуточная аттестация в форме зачета.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 4 зачетные единицы.